Aula 05: Introdução à Probabilidade (Parte II)

Estatística e Probabilidades

André Victor Ribeiro Amaral (sala 3029)

avramaral@gmail.com

Probabilidade Condicional

Definido *Espaço de Probabilidade*, bem como os elementos que o compõe, pode-se, então, falar sobre Probabilidade Condicional.

Definição 1

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam A e B eventos quaisquer, com $P(B) > 0$; define-se Probabilidade Condicional de A *dado* B como:

$$P(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \text{ tal que } A, B \text{ são eventos.}$$

Probabilidade Condicional

Considere os eventos A e B representados no Diagrama de Venn a seguir:

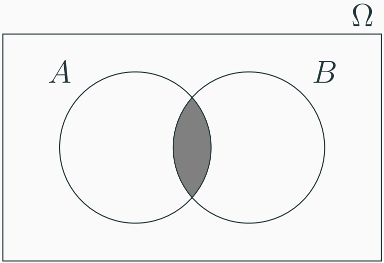

Figura 1: Diagrama de Venn para $A \cap B$, tal que A, B são eventos

Nesse caso, $\mathbb{P}(A|B)$ corresponderá à razão entre a área hachurada $(A \cap B)$ e a área de B.

Teorema da Multiplicação

Como consequência da definição de Probabilidade Condicional, podemos enunciar o Teorema da Multiplicação:

Teorema 1 (Teorema da Multiplicação)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (para $n \geqslant 2$) eventos; então:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

A demonstração é apresentada a seguir.

Probabilidade Condicional

Demonstração (por indução) do Teorema 1:

A. Caso base: $n = 2 \implies \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{2} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1)$.
Conseq. da Def. 1.

B. Hipótese de indução:
$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i)$.

C. Tese: $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$.
Dessa forma, desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade, temos:
$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) = \mathbb{P}((\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \cap A_{k+1}) =$
$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \times \mathbb{P}(A_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} A_i) \overset{\text{por H.I.}}{=}$
$\mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i) \times \mathbb{P}(A_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} A_i) =$
$\mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{k+1}|\bigcap_{i=1}^{k} A_i)$; por fim, tome $n = k + 1$.

Probabilidade Condicional – Exercício

Exercício (ROSS, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*):

Um(a) estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade de que o(a) estudante finalize o teste em menos de x horas seja igual $\frac{x}{2}$, para todo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Então, dado que ele(a) continua a realizar o teste após 0.75 horas, qual a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?

Probabilidade Condicional – Exercício

Resposta:

Seja L_x o evento em que o(a) estudante finaliza o teste em menos de x horas (com $0 \leqslant x \leqslant 1$) e F o evento em ele(a) utiliza a hora completa.

Perceba que $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}({L_1}^c) = 1 - \mathbb{P}(L_1) = 1 - 0.5 = 0.5.$

Nesse sentido, queremos determinar $\mathbb{P}(F|{L_{0.75}}^c)$. Assim:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F|{L_{0.75}}^c) &= \frac{\mathbb{P}(F \cap {L_{0.75}}^c)}{\mathbb{P}({L_{0.75}}^c)}, \text{ onde } F \subseteq {L_{0.75}}^c \\ &= \frac{\mathbb{P}(F)}{1 - \mathbb{P}(L_{0.75})} = \frac{0.5}{1 - 0.375} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8.\end{aligned}$$

Além disso, $\mathbb{P}(F^c|{L_{0.75}}^c) = 1 - 0.8 = 0.2.$

Partição do Espaço do Espaço Amostral

Agora, antes de avançarmos para um próximo importante resultado, é necessário apresentar a ideia de Partição do Espaço Amostral.

Definição 2

Dizemos que os conjuntos (ou eventos) $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n \in \mathcal{A}$ formam uma Partição do Espaço Amostral, se:

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$; e
2. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$.

Partição do Espaço do Espaço Amostral

Considere os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ representados no diagrama a seguir:

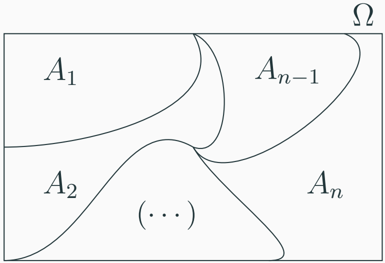

Figura 2: Partição do Espaço Amostral (Ω).

Como os eventos são disjuntos 2 a 2 ($A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$) e a união de todos esses eventos é igual ao próprio espaço amostral, então a Figura 2 representa uma partição de Ω.

Teorema da Probabilidade Total

A fim de, imediatamente a seguir, enunciar o Teorema da Probabilidade Total, considere um evento $B \in \mathcal{A}$ e a sequência $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}, A_n$ formando uma partição do espaço amostral. A Figura 3 ilustra esse cenário:

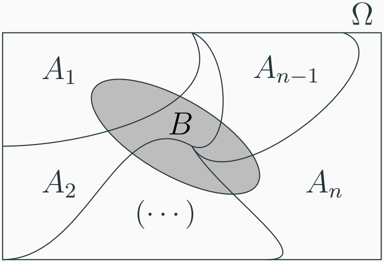

Figura 3: Partição do Espaço Amostral (Ω) intersecção com B.

Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2 (Teorema da Probabilidade Total)

Dado evento B, se a sequência $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ formar uma partição de Ω, então:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i).$$

Demonstração:

É possível escrever $B = B \cap \Omega$; dessa forma, utilizando a propriedade 1 da Definição 2, segue que $B = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$. Assim, por construção, reescrevemos B como a união de eventos disjuntos, e, por isso, vale o Axioma 3 da Teoria da Probabilidade. Continuando: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) \overset{\text{Teorema 1}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)$, como queríamos demonstrar.

Teorema da Probabilidade Total – Exercício

Exercício (JAMES, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*)**:**

Durante o mês de Novembro a probabilidade de chuva é de 0.3. O Fluminense ganha um jogo em um dia de chuva com a probabilidade de 0.4; e em um dia sem chuva, com a probabilidade de 0.6. Se ele ganhou um jogo em Novembro, qual é a probabilidade de que choveu nesse dia?

Teorema da Probabilidade Total – Exercício

Resposta:

Sejam $C = \{\text{choveu no mês de Novembro}\}$ e $F = \{\text{Fluminense ganha um jogo}\}$; nesse caso, $\mathbb{P}(C) = 0.3$, $\mathbb{P}(F|C) = 0.4$ e $\mathbb{P}(F|C^c) = 0.6$. Além disso, note que C e C^c formam um partição de Ω.

Queremos, portanto, determinar $\mathbb{P}(C|F)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C|F) &= \frac{\mathbb{P}(C \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F|C) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(F)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(F|C) \cdot \mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(F|C) \cdot \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(F|C^c) \cdot \mathbb{P}(C^c)} \\
&= \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.4 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7} \approx 0.22.
\end{aligned}$$

Fórmula de Bayes

Por fim, como consequência direta da Definição 1 e dos Teoremas 1 e 2, chegamos à Formula de Bayes.

Corolário 1 (Fórmula de Bayes)

Dado evento B, se a sequência $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ formar uma partição de Ω, então:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{j=i}^{n} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B|A_j)}.$$

Demonstração:

Pela Definição 1, $\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. Continuando, e trabalhando com o numerador, como consequência do Teorema 1, temos que: $\frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)}$. Manipulando, agora, o denominador, e justificado pelo Teorema 2, concluímos que:

$$\frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=i}^{n} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B|A_j)} \implies \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(B|A_i)}{\sum_{i=i}^{n} \mathbb{P}(A_j) \times \mathbb{P}(B|A_j)}.$$

Fórmula de Bayes

Exercício:

Considere um teste para um determinado tipo de doença em que 95% dos doentes reagem positivamente à avaliação, enquanto que 3% dos indivíduos testados e que não apresentam a doença também têm resultado positivo.

Em relação à doença testada, apenas 1% das pessoas a possuem.

Um indivíduo, escolhido ao acaso, realizou o teste e obteve resultado positivo. Qual a probabilidade de que essa pessoa esteja, de fato, doente?

Fórmula de Bayes

Resposta:

Sejam $D = \{\text{indivíduo possui a doença}\}$ e $T = \{\text{teste apresentou resultado positivo}\}$. Dessa forma, $\mathbb{P}(D) = 0.01$, $\mathbb{P}(D^c) = 0.99$, $\mathbb{P}(T|D) = 0.95$, $\mathbb{P}(T^c|D) = 0.05$, $\mathbb{P}(T|D^c) = 0.03$ e $\mathbb{P}(T^c|D^c) = 0.97$. Nesse cenário, queremos calcular $\mathbb{P}(D|T)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D|T) &= \frac{\mathbb{P}(D \cap T)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T|D) \cdot \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(T|D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(T|D^c) \cdot \mathbb{P}(D^c)} \\
&= \frac{0.95 \cdot 0.01}{0.95 \cdot 0.01 + 0.03 \cdot 0.99} \approx 0.24
\end{aligned}$$

$(D|T^c)$ é chamado de “falso-negativo” e $(D^c|T)$ é “falso-positivo”.

Aplicação

O problema de *Monty Hall*

Suponha que um convidado está em um programa de televisão e deve escolher entre três portas (A, B e C), uma das quais esconde (de maneira *uniforme*) um automóvel e as outras duas dois bodes (um em cada). O convidado escolhe uma das portas. Em seguida, o apresentador, que sabe o que as portas escondem, escolhe uma das duas restantes – mostrando um bode. Ele então pergunta ao convidado: "*Você quer trocar de porta?*". O problema é: é vantajoso para o convidado fazê-lo? Se o fizer, qual a sua probabilidade de ganhar o automóvel?

Aplicação

Suponha, inicialmente, que o participante escolheu a porta "A". Em seguida, o apresentador abriu a porta "B" (que, obviamente, não tinha o prêmio); nesse caso, defina $V = \{$apresentador mostra a porta "B" vazia$\}$.

Aqui, vamos determinar $\mathbb{P}(A|V)$ e $\mathbb{P}(C|V)$, onde A (B ou C) $= \{$a porta A (B ou C) contém o prêmio$\}$.

Primeiro: $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(V|C) \cdot \mathbb{P}(C)$. Assim, $\mathbb{P}(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

Por último, $\mathbb{P}(A|V) = \frac{\mathbb{P}(V|A) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{1}{3}$. Similarmente, $\mathbb{P}(B|V) = 0$ e $\mathbb{P}(C|V) = \frac{2}{3}$.

Nesse caso, faz mais sentido trocar a porta "A" pela porta "C".

Desafio

1. (JAMES, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*)

   Pedro quer enviar uma carta a Marina. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é de 0.8. A probabilidade de que os Correios não a perca é de 0.9. A probabilidade de que o carteiro entregue a carta é de 0.9. Dado que Marina não recebeu a carta, qual a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?