Estatística e Probabilidades

Lista 04

Entrega em 03/09/2020

Para todas as questões, a construção do resultado (através dos cálculos, explicações, comentários, etc.) deve ser apresentada. Respostas sem esse tipo de justificativa **não** serão pontuadas.

A questão de *desafio* vale dois pontos extras na primeira prova (limitado ao valor máximo da avaliação) para o(a) **primeiro(a)** aluno(a) que submeter a solução correta. Por fim, o nível de dificuldade desse tipo de questão **não** será repetido na prova. Fiquem tranquilos!

Exercício 0.1 (ROSS, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*)**.** Suponha que 3 bolas sejam sorteadas (sem reposição) de uma urna contendo 3 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis. Sejam X e Y variáveis aleatórias que representam, respectivamente, o número de bolas vermelhas e bolas brancas escolhidas. Nesse caso, determine a distribuição conjunta de X e Y; isto é, determine $f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Além disso, calcule $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ e $f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$, para todos x, $y \in \{0, 1, 2, 3\}$.
`Sugestão:` Escreva a resposta em formato de tabela.

Exercício 0.2 (ROSS, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*)**.** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Nesse caso, encontre a probabilidade condicional de X dado que $X + Y = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dê uma interpretação para a resposta obtida.
`Sugestão:` Utilize o fato de que, se X, Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, então $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$[1]. Além disso, perceba que será necessário reescrever o termo $\mathbb{P}(X = x, X + Y = n)$ de maneira apropriada.

Desafio 0.1 (adaptado de: GRIMMET, Geoffrey e WELSH, Dominic. *Probability: an introduction*)**.** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente. Nesse caso, determine a distribuição de $X + Y$. Dê uma interpretação para a resposta obtida.
`Sugestão:` Utilize a fórmula do Binômio de Newton; isto é, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$.

[1]Essa afirmação é exatamente o que está sendo pedido para mostrar no "Desafio 0.1.".

Estatística e Probabilidades

Lista 04

RESPOSTAS

Exercício 0.1. Relembrando que existem 3 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis, a primeira coisa que devemos fazer é determinar $f_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, para todos x, $y \in \{0,1,2,3\}$, tal que X conta o números de bolas vermelhas e Y conta o número de bolas brancas. Nesse caso, note que

$$f_{X,Y}(0,0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{5!}{3!(5-3)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{10}{220}$$
$$f_{X,Y}(0,1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{40}{220}$$
$$f_{X,Y}(0,2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{30}{220}$$
$$f_{X,Y}(0,3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{4}{220}$$
$$f_{X,Y}(1,0) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{30}{220}$$
$$f_{X,Y}(1,1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{60}{220}$$
$$f_{X,Y}(1,2) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{18}{220}$$
$$f_{X,Y}(2,0) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{15}{220}$$
$$f_{X,Y}(2,1) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{12}{220}$$
$$f_{X,Y}(3,0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{3!(12-3)!}{12!} = \frac{1}{220};$$

além disso, $f_{X,Y}(1,3) = f_{X,Y}(2,2) = f_{X,Y}(2,3) = f_{X,Y}(3,1) = f_{X,Y}(3,2) = f_{X,Y}(3,3) = 0$.

Agora, para determinar $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ e $f_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y)$ basta lembrar que, por definição,

$$f_X(x) = \sum_{y:f_{X,Y}(x,y)>0} f_{X,Y}(x,y) \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \sum_{x:f_{X,Y}(x,y)>0} f_{X,Y}(x,y),$$

para todos x, $y \in \{0,1,2,3\}$. Porém, ao invés de indicarmos todos cálculos de maneira separada, vamos apresentar a nossa resposta final em formato de tabela (mostrada abaixo).

$x \backslash y$	0	1	2	3	$\mathbb{P}(X=x)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

Exercício 0.2. De maneira direta, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x|X+Y=n) &= \frac{\mathbb{P}(X=x, X+Y=n)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(X+Y=n|X=x)}{\mathbb{P}(X+Y=n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=n-x)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}\end{aligned}$$

já que X e Y são, por hipótese, independentes. Além disso, pela "`Sugestão`", sabemos que se $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, então $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x|X+Y=n) &= \frac{\cancel{e^{-\lambda_1}}{\lambda_1}^x}{x!}\cdot\frac{\cancel{e^{-\lambda_2}}{\lambda_1}^{(n-x)}}{(n-x)!}\cdot\frac{n!}{\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot\frac{{\lambda_1}^x{\lambda_2}^{(n-x)}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} \\ &= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{(n-x)} \\ &= \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^x\cdot\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{(n-x)};\end{aligned}$$

ou seja, $X|X+Y=n \sim \text{Binomial}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Desafio 0.1. Seja $Z=X+Y$. De maneira geral, note que $Z=z$ se, e somente se, $X=x$ e $Y=z-x$, para algum valor $x \leq z$. Assim,

$$\mathbb{P}(Z=z) = \mathbb{P}\left(\bigcup_x \{X=x\}\cap\{Y=z-x\}\right),$$

onde a união acima é "de eventos disjuntos", já que $\{X=x\}\cap\{Y=z-x\}\subset\{X=x\}$ e $\{X=x_i\}\cap\{X=x_j\}=\emptyset$, $\forall i\neq j$. Dessa forma,

$$\mathbb{P}(Z=z) = \sum_x \mathbb{P}(X=x, Y=z-x) \overset{\text{independência}}{=} \sum_x \mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=z-x).$$

Agora, voltando ao nosso exercício e lembrando que X e Y têm distribuições Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2, respectivamente, temos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=z) &= \sum_{x=0}^{z} \frac{e^{-\lambda_1}{\lambda_1}^{x}}{x!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2}{\lambda_2}^{(z-x)}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{x!(z-x)!} \cdot {\lambda_1}^{x}{\lambda_2}^{(z-x)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!(z-x)!} \cdot {\lambda_1}^{x}{\lambda_2}^{(z-x)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \cdot {\lambda_1}^{x}{\lambda_2}^{(z-x)} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1+\lambda_2)^{z}}{z!}, \text{ usando o Binômio de Newtow; i.e., } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.\end{aligned}$$

Finalmente, note que, analisando $\mathbb{P}(Z=z)$, podemos dizer que $X+Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$.