Estatística e Probabilidades

Lista 03

Entrega em 27/08/2020

Para todas as questões, a construção do resultado (através dos cálculos, explicações, comentários, etc.) deve ser apresentada. Respostas sem esse tipo de justificativa **não** serão pontuadas.

A questão de *desafio* vale dois pontos extras na primeira prova (limitado ao valor máximo da avaliação) para o(a) **primeiro(a)** aluno(a) que submeter a solução correta. Por fim, o nível de dificuldade desse tipo de questão **não** será repetido na prova. Fiquem tranquilos!

Exercício 0.1. Mostre que se a variável aleatória X tem distribuição geométrica com parâmetro p; isto é, se $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = (1-p)^{x-1}\,p$, com $x \in \{1, 2, \cdots\}$, então X tem a propriedade de "*perda de memória*". Em outras palavas, mostre que $\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s)$, para s, t números inteiros não-negativos.

`Sugestão`: Determine $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ e veja que $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$. Para isso, note que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo a e razão r é dada por $S_n(a, r) = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Exercício 0.2. João trabalha com vendas por telefone. A probabilidade de ele conseguir efetuar uma venda em um primeiro contato com o cliente (isto é, de ele ter *sucesso*) é de 0.4. Dado que as ligações são independentes, determine:

(a) Qual a probabilidade de ele ter tido exatamente 5 fracassos antes de conseguir sua segunda ligação de sucesso?

(b) Qual a probabilidade de ele ter tido menos que 5 fracassos antes de conseguir sua segunda ligação de sucesso?

Desafio 0.1 (James, Barry R. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*)**.** Um jogador vai lançar uma moeda honesta. Ele para depois de jogar ou duas caras sucessivas ou duas coroas sucessivas. Qual a esperança do número de lançamentos?

`Sugestão`: Para resolver essa questão, lembre-se de que, sobre séries de potências,

1. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tiver raio de convergência $r > 0$, então $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é diferenciável em $(-r, r)$ e vale que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot c_n x^{n-1}$; e

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$.

Estatística e Probabilidades

Lista 03

RESPOSTAS

Exercício 0.1. Comece calculando $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Nesse caso,

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{n=1}^{x} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{x} (1-p)^{n-1}\, p = \frac{p\,(1-(1-p)^x)}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^x,$$

já que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo a e razão r é dada por $S_n(a,r) = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$.

Dessa forma, podemos dizer que $\mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x) = 1 - [1-(1-p)^x] = (1-p)^x$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > s+t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(\{X > s+t\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > t)}, \text{ já que } \{X > s+t\} \subset \{X > t\} \\
&= \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^t} = (1-p)^{s+t-t} = (1-p)^s = \mathbb{P}(X > s) = 1 - F_X(s).
\end{aligned}$$

Como curiosidade, essa propriedade de “perda de memória” também é válida para a *distribuição exponencial* e, nesse caso, ela vai ser particularmente útil para resolver problemas com aplicações.

Exercício 0.2. Dado um experimento aleatório do tipo Bernoulli, seja X a variável aleatória que conta o número de tentativas (independentes) até que r sucessos ocorram, tal que cada tentativa tem probabilidade de sucesso p. Aqui, $X \sim$ Binomial Negativa(r,p), onde $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{x-1}{r-1}\, p^r (1-p)^{x-r}$.

Para o nosso exercício, vamos dizer que $X \sim$ Binomial Negativa$(2, 0.4)$.

(a) Primeiro, queremos determinar $\mathbb{P}(X = 5+2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 7) &= \binom{7-1}{2-1}\, 0.4^2\, (1-0.4)^{7-2} \\
&= \frac{6!}{1!(6-1)!} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^5 = 6 \cdot 0.16 \cdot 0.07776 \approx 0.075.
\end{aligned}$$

(b) Nesse caso, queremos determinar $\mathbb{P}(2 \leq X < 5+2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(2 \leq X < 7) &= \mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=6)\\ &= 0.4^2\left[\binom{1}{1}0.6^0+\binom{2}{1}0.6^1+\binom{3}{1}0.6^2+\binom{4}{1}0.6^3+\binom{5}{1}0.6^4\right]\\ &= 0.16\cdot(1+1.2+1.08+0.864+0.648)\approx 0.77.\end{aligned}$$

Finalmente, perceba que a *função massa de probabilidade* da distribuição Binomial Negativa é intuitiva, já que $\binom{x-1}{r-1}$ representa a quantidade de maneiras que podemos distribuir, fixada a última tentativa como "sucesso", os "$r-1$ sucessos" em "$x-1$ posições".

Desafio 0.1. Seja X uma variável aleatória que conta o número de lançamentos até o jogo acabar. Nesse caso, comece percebendo que $\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}(X=1)=0$, já que o jogador precisa de, no mínimo, dois lançamentos para atingir seu objetivo. Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2) &= \mathbb{P}(\{\text{cara, cara}\}\cup\{\text{coroa, coroa}\})\\ &= \mathbb{P}(\{\text{cara, cara}\})+\mathbb{P}(\{\text{coroa, coroa}\}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=3) &= \mathbb{P}(\{\text{coroa, cara, cara}\}\cup\{\text{cara, coroa, coroa}\}) = 2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\\ \mathbb{P}(X=4) &= \mathbb{P}(\{\text{cara, coroa, cara, cara}\}\cup\{\text{coroa, cara, coroa, coroa}\}) = 2\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{8}\\ &\vdots\\ \mathbb{P}(X=n) &= \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n\geq 2.\end{aligned}$$

Assim

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty} n\cdot\mathbb{P}(X=n) = 0+0+\sum_{n=2}^{+\infty} n\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}-1.$$

Agora, iremos utilizar dois fatos sobre séries de potências[1]:

(a) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ tiver raio de convergência $r>0$, então $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ é diferenciável em $(-r,r)$ e vale que $f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot c_n x^{n-1}$; e

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x|<1$.

Utilizando "(a)" e "(b)", temos que, para $|x|<1$, $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^{n-1}$. Dessa forma,

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1 = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}-1 = 4-1 = 3.$$

[1]Uma série de potências (centrada em *zero*) é uma série da forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$, onde x é variável e $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}$ é sequência de coeficientes.