Estatística e Probabilidades

Lista 01

Entrega em 13/08/2020

Para todas as questões, a construção do resultado (através dos cálculos, explicações, comentários, etc.) deve ser apresentada. Respostas sem esse tipo de justificativa **não** serão pontuadas.

A questão de *desafio* vale dois pontos extras na primeira prova (limitado ao valor máximo da avaliação) para o(a) **primeiro(a)** aluno(a) que submeter a solução correta. Por fim, o nível de dificuldade desse tipo de questão **não** será repetido na prova. Fiquem tranquilos!

Exercício 0.1. Considere o experimento aleatório de lançar um dado (honesto) três vezes. Seja $A_x = \{\text{soma dos três lançamentos é } x\}$. Qual é maior: $\mathbb{P}(A_9)$ ou $\mathbb{P}(A_{10})$? Para responder essa pergunta, calcule as probabilidades adequadas.

Exercício 0.2 (ROSS, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*)**.** Um(a) estudante faz um teste com uma hora de duração. Suponha que a probabilidade de que o(a) estudante finalize o teste em menos de x horas seja igual a $\frac{x}{2}$, para todo $0 \leq x \leq 1$. Então, dado que ele(a) continua a realizar o teste após 0.75 horas, qual a probabilidade condicional de que a hora completa seja utilizada?

Exercício 0.3. Suponha que em determinado experimento aleatório (por exemplo, o "lançamento de uma moeda") seja realizado n vezes de maneira independente. Para esse experimento arbitrário, a probabilidade de sucesso; isto é, de que o evento de interesse aconteça, vale p (por consequência, a probabilidade de fracasso é igual a $1 - p$). Nesse cenário, calcule a probabilidade de que k sucessos ocorram em n tentativas.

Desafio 0.1 (adaptado de: ROSS, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*)**.** Dois jogadores A e B estão jogando um jogo (de azar) que funciona da seguinte forma: a cada rodada (independente) o jogador A ganha um ponto com probabilidade p e o jogador B ganha um ponto com probabilidade $1-p$; até que uma quantidade pré-estabelecida de rodadas seja alcançada. Depois de algumas rodadas, e antes do fim, o jogo teve que ser interrompido. Nesse cenário, qual a probabilidade de que o jogador A tivesse sido o vencedor no caso de o jogo ter sido interrompido em um momento no qual ele precisasse de n pontos para vencer e o jogador B precisasse de m pontos? Alternativamente, podemos perguntar, para uma sequência de realizações independentes de determinado experimento aleatório com probabilidade de sucesso p, "Qual a probabilidade de que n sucessos ocorram antes de m fracassos?".

Estatística e Probabilidades

Lista 01

RESPOSTAS

Exercício 0.1. Para calcular as probabilidades de interesse, primeiro defina Ω. Nesse caso, $\Omega = \{(d_1, d_2, d_3) : (d_1, d_2, d_3) \in \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\}$, tal que $\#(\Omega) = 6^3 = 216$. Além disso, note que, como todas as configurações $\omega \in \Omega$ acontecem de maneira *equiprovável*, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$, $\forall A$ evento definido. Dessa forma, é suficiente determinar $\#(A_9)$ e $\#(A_{10})$.

Primeiro, note que

$$\begin{aligned} A_9 = \{&(1,2,6),(1,6,2),(2,1,6),(2,6,1),(6,1,2),(6,2,1),\\ &(1,3,5),(1,5,3),(3,1,5),(3,5,1),(5,1,3),(5,3,1),\\ &(1,4,4),(4,1,4),(4,4,1),\\ &(2,2,5),(2,5,2),(5,2,2),\\ &(2,3,4),(2,4,3),(3,2,4),(3,4,2),(4,2,3),(4,3,2),\\ &(3,3,3)\}. \end{aligned}$$

O que significa dizer que $\#(A_9) = 25$. Entretanto, não é necessário listar todas as possibilidades. Basta perceber que, em cada uma das linhas de triplas ordenadas que acabamos de escrever, os elementos listados a partir da segunda posição são apenas permutações (excluindo, possivelmente, triplas repetidas) do primeiro elemento. Então, $\#(A_9) = 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{3!} = 25$. Similarmente, $\#(A_{10}) = 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 27$.

Finalmente, $\mathbb{P}(A_9) = \frac{25}{216} < \frac{27}{216} = \mathbb{P}(A_{10})$.

Exercício 0.2. Seja L_x o evento no qual o(a) estudante finaliza o teste em menos de uma x horas (com $0 \leq x \leq 1$) e F o evento em que ele(a) utiliza a hora completa. Aqui, note que $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}({L_1}^c) = 1 - \mathbb{P}(L_1) = 1 - 0.5 = 0.5$. Nesse caso, queremos obter $\mathbb{P}(F|{L_{0.75}}^c)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F|{L_{0.75}}^c) &= \frac{\mathbb{P}(F \cap {L_{0.75}}^c)}{\mathbb{P}({L_{0.75}}^c)}, \text{ tal que } F \subset {L_{0.75}}^c \\ &= \frac{\mathbb{P}(F)}{1 - \mathbb{P}(L_{0.75})} = \frac{0.5}{1 - 0.375} = \frac{0.5}{0.625} = 0.8. \end{aligned}$$

Além disso, $\mathbb{P}(F^c|L^c_{0.75}) = 1 - 0.8 = 0.2$.

Exercício 0.3. Considere uma sequência particular de eventos tal que, para n tentativas, k sucessos foram obtidos (e $n-k$ fracassos). Nesse caso, e sob a hipótese de independência dos experimentos, temos que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap {A_{k+1}}^c \cap \cdots \cap {A_n}^c) = \mathbb{P}(A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_k) \times \mathbb{P}({A_{k+1}}^c) \times \cdots \times \mathbb{P}({A_n}^c),$$

onde A_i é o evento no qual se obteve sucesso na i-ésima tentativa.

Relembrando que $\mathbb{P}(A_i) = p$ e $\mathbb{P}({A_i}^c) = 1 - p$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, a probabilidade calculada é de $p^k \cdot (1-p)^{n-k}$. Finalmente, basta notar que existem $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sequências desse tipo. Assim,

$$\mathbb{P}(k \text{ sucessos em } n \text{ tentativas}) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Desafio 0.1. Para a solução desse problema, por favor, faça referência ao vídeo que está disponível em `https://www.youtube.com/watch?v=G737Ug-65d4` – a partir dos `36 minutos e 23 segundos`.